Die vollständige Analogie Scheibe-Platte

Schaefer, Hermann

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 8, 1956, S.142-150

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Die vollständige Analogie Scheibe — Platte

Von **Hermann Schaefer**

Summary: The analogy between Airy's stress function of a slice and the deflection of a thin plate (slab) is perfected by two stress functions of the slab related to the displacements of the slice.

Übersicht: Die *Wieghardt*sche Analogie zwischen Airyscher Spannungsfunktion der Scheibe und der Durchbiegung einer Platte wird vervollständigt durch Einführung von zwei Spannungsfunktionen der Platte, die den Verschiebungen der Scheibe entsprechen.

1. Einführung

Wir betrachten ein zweidimensionales, ebenes, isotropes und elastisches Kontinuum, das in der (x_1, x_2)-Ebene eines cartesischen (x_1, x_2, x_3)-Koordinatensystems liegt und dort einen Bereich endlichen Flächeninhaltes einnimmt. Es sei nur an seiner Berandung belastet. Wir sprechen von einer Scheibe, wenn die Randbelastung aus Kräften besteht, die in der Ebene des Kontinuums liegen, dagegen von einer Platte, wenn am Rande Kräftepaare angreifen, deren Vektoren in der (x_1, x_2)-Ebene liegen, und dazu Kräfte in x_3-Richtung. In einer Scheibe herrscht ein ebener Spannungszustand, eine Platte wird immer auf Biegung beansprucht.

Es ist wohlbekannt, daß die Airysche Spannungsfunktion $\Phi\ (x_1, x_2)$ der Scheibe und die Durchbiegung $w\ (x_1, x_2)$ der Platte biharmonische Funktionen sind, also den Gleichungen $\Delta\, \Delta\, \Phi = 0$ bzw. $\Delta\, \Delta\, w = 0$ genügen. Dieser mathematischen Analogie ist zuerst *K. Wieghardt* nachgegangen und hat sie zu einem experimentellen Verfahren ausgebaut. Im Literaturverzeichnis sind auch einige neuere Arbeiten hierüber aufgeführt [1, 2, 3]. Aus der nachstehenden Analogietabelle geht hervor, wie der Spannungszustand der Scheibe zu den Verkrümmungen der verbogenen Platte in Analogie steht.

Diese *Wieghardt*sche Analogie läßt sich nun vervollständigen, indem man die beiden Spannungsfunktionen $\Phi_1\ (x_1, x_2)$ und $\Phi_2\ (x_1, x_2)$ der Platte einführt und zeigt, daß sie Differentialgleichungen derselben Gestalt genügen, wie die Verschiebungen $v_1\ (x_1, x_2)$ und $v_2\ (x_1, x_2)$ der Scheibe es tun[1]).

Auf die beiden Spannungsfunktionen der Platte hat *W. Günther* hingewiesen [4]. Seine — im Rahmen der dortigen Betrachtungen durchaus konsequente — Vorzeichenwahl bei den Schnittkräften der Platte läßt allerdings eine Analogie zu den Verschiebungen der Scheibe noch nicht hervortreten.

Wir wollen nun versuchen, die Analogie Scheibe — Platte augenfällig zu machen, indem wir mathematisch analoge Gleichungen einander gegenüber stellen.

Als Werkstoffkonstanten benutzen wir den Elastizitätsmodul E und die *Poisson*sche Querkontraktionszahl ν; h ist die Dicke der Platte.

---

[1]) Wir setzen in der Analogietabelle $\Phi = \Phi_3$ und $w = v_3$, um den Vektorcharakter von (Φ_1, Φ_2, Φ_3) und (v_1, v_2, v_3) zu betonen.

2. Die Analogietabelle

Die Kinematik der Scheibe:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$$

ist der symmetrische Deformationstensor der Scheibe. ε_{11} und ε_{22} sind die Dehnungen, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ die Schubverformungen. Führt man die Drehung ω eines Scheibenelementes ein, so lauten die

Kompatibilitätsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \end{aligned}\right\} \qquad (1\,\mathrm{a})$$

Die Statik der Platte:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

ist der symmetrische Momententensor der Platte. M_{11} und M_{22} sind die Biegemomente, $M_{12} = M_{21}$ die Drillmomente. Zusammen mit den Querkräften Q_1 und Q_2 genügen sie den

Gleichgewichtsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_2} &= Q_1 \\ \frac{\partial M_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} &= Q_2 \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1\,\mathrm{b})$$

Sie werden identisch in den

Verschiebungen

v_1 und v_2 erfüllt durch

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \\ \omega &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2\,\mathrm{a})$$

Spannungsfunktionen

Φ_1 und Φ_2 erfüllt [5] durch

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}; \quad M_{22} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \\ M_{21} = M_{12} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}\right) \\ Q_1 &= \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}; \quad Q_2 = \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \\ \Omega &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2\,\mathrm{b})$$

Die Statik der Scheibe:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

ist der symmetrische Spannungstensor der Scheibe. σ_{11} und σ_{22} sind die Normalspannungen, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ die Schubspannungen.

Die Kinematik der Platte:

$$\begin{pmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{12} \\ \varkappa_{21} & \varkappa_{22} \end{pmatrix}$$

ist der symmetrische (infinitesimale) Verkrümmungstensor der Biegefläche $v_3\,(x_1, x_2)$. $\varkappa_{11}$ und $\varkappa_{22}$ sind die Normalkrümmungen, $\varkappa_{12} = \varkappa_{21}$ die

Für den Spannungstensor bestehen die

Gleichgewichtsbedingungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}=0\\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}=0\end{aligned}\right\} \quad (3\,a)$$

Sie werden identisch in der *Spannungsfunktion Φ_3* (Airy) erfüllt durch den Ansatz:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11}=\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x_2^{\,2}}\,; \quad \sigma_{22}=\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x_1^{\,2}}\\ \sigma_{21}=\sigma_{12}=-\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x_1\,\partial x_2}\end{aligned}\right\} \quad (4\,a)$$

geodätischen Torsionen der Kurven $x_1 = \text{const.}$ und $x_2 = \text{const.}$ auf der Biegefläche. Als

Kompatibilitätsbedingungen

bestehen die *Codazzi*schen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \varkappa_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \varkappa_{12}}{\partial x_2}=0\\ \frac{\partial \varkappa_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial \varkappa_{22}}{\partial x_2}=0\end{aligned}\right\} \quad (3\,b)$$

Die Verkrümmungen der infinitesimalen *Biegefläche v_3* lauten:

$$\left.\begin{aligned}\varkappa_{11}=\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^{\,2}}\,; \quad \varkappa_{22}=\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^{\,2}}\\ \varkappa_{21}=\varkappa_{12}=-\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1\,\partial x_2}\end{aligned}\right\} \quad (4\,b)$$

Soweit Statik und Kinematik bei Scheibe und Platte.

Beim ebenen Spannungszustand lautet das *Hookesche Gesetz*

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{11}&=\frac{1}{E}(\sigma_{11}-\nu\sigma_{22})\\ \varepsilon_{22}&=\frac{1}{E}(\sigma_{22}-\nu\sigma_{11})\\ \varepsilon_{12}&=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}\end{aligned}\right\} \quad (5a)$$

Aus *Bernoullischer Hypothese* und *Hookeschem Gesetz* folgt:

$$\left.\begin{aligned}M_{11}&=\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}(\varkappa_{11}+\nu\varkappa_{22})\\ M_{22}&=\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}(\varkappa_{22}+\nu\varkappa_{11})\\ M_{12}&=(1-\nu)\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}\varkappa_{12}\end{aligned}\right\} \quad (5b)$$

oder nach Umkehrung

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11}&=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11}+\nu\,\varepsilon_{22})\\ \sigma_{22}&=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22}+\nu\,\varepsilon_{11})\\ \sigma_{12}&=(1-\nu)\frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_{12}\end{aligned}\right\} \quad (6a)$$

$$\left.\begin{aligned}\varkappa_{11}&=\frac{12}{E h^3}(M_{11}-\nu M_{22})\\ \varkappa_{22}&=\frac{12}{E h^3}(M_{22}-\nu M_{11})\\ \varkappa_{12}&=(1+\nu)\frac{12}{E h^3}M_{12}\end{aligned}\right\} \quad (6b)$$

Bei der Scheibe werden die Kompatibilitätsbedingungen (1a) mit Hilfe des *Hooke*schen Gesetzes (5a) durch die Spannungen ausgedrückt. Eliminiert man zunächst ω in (1a), so kommt

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^{\,2}}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^{\,2}}-2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1\,\partial x_2}=0 \qquad (7a)$$

und nach Einführung von (5a)

$$\Delta\,(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - (1+\nu)\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}\right)\right] = 0 \tag{8a}$$

Zufolge der Gleichgewichtsbedingungen (3a) verschwindet die eckige Klammer. Führt man nach (4a) die Spannungsfunktion Φ_3 ein, so wird

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \Delta\,\Phi_3 \tag{9a),}$$

und nach (8a) besteht für Φ_3 die biharmonische Gleichung

$$\Delta\,\Delta\,\Phi_3 = 0 \tag{10a}$$

Bei der Platte werden die Gleichgewichtsbedingungen (1b) mit Hilfe von (5b) durch die Verkrümmungen ausgedrückt. Eliminiert man zuvor die Querkräfte in (1b), so kommt zunächst

$$\frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_2^{\,2}} - 2\,\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1\,\partial x_2} = 0 \tag{7b),}$$

und nach Einführung von (5b)

$$\Delta\,(\varkappa_{11} + \varkappa_{22}) - (1-\nu)\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varkappa_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varkappa_{12}}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varkappa_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varkappa_{22}}{\partial x_2}\right)\right] \tag{8b).}$$

Zufolge der *Codazzi*schen Gleichungen (3b) verschwindet di e Klammer. Führt man nach (4b) die Biegefläche v_3 ein, so wird

$$\varkappa_{11} + \varkappa_{22} = \Delta\,v_3 \tag{9b),}$$

und nach (8b) besteht für v_3 die biharmonische Gleichung

$$\Delta\,\Delta\,v_3 = 0 \tag{10b}$$

Die beiden Gleichungen (10a) und (10b) zusammen mit nd (4b) drücken die *Wieghardt*sche Analogie aus.

Bei der Scheibe schreiben wir die Gleichgewichtsbedingung (3a) mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes (6a) in den Deformationen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - (1-\nu)\left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2}\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (1-\nu)\left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11a}$$

Mit Benutzung der Kompatibilitätsbedingung (1a) und der Abkürzung

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \varepsilon \tag{12a}$$

wird aus (11a)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} - (1-\nu)\frac{\partial \omega}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} + (1-\nu)\frac{\partial \omega}{\partial x_1} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{13a).}$$

Nach (2a) und (12a) ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}&=\varepsilon\\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}&=2\omega\end{aligned}\right\}\qquad(14\text{a}).$$

Aus diesem Gleichungssystem (13a, 14a) berechnen sich v_1 und v_2 durch Integration [6] zu

$$\left.\begin{aligned}E\,v_1&=-(1+\nu)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_1}+p_1\\ E\,v_2&=-(1+\nu)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_2}+p_2\end{aligned}\right\}\qquad(15\text{a}),$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}p_1&=\int\frac{E}{1-\nu}\varepsilon\,d x_1-E\omega\,d x_2\\ p_2&=\int E\omega\,d x_1+\frac{E}{1-\nu}\varepsilon\,d x_2\end{aligned}\right\}\qquad(16\text{a})$$

wegen (13a) ein Paar harmonisch-konjugierter Funktionen sind.

Dabei ist

$$\frac{E}{1-\nu}\varepsilon=\Delta\,\Phi_3\qquad(17\text{a}).$$

Der entsprechende Weg bei der Platte: Mit (6b) werden die *Codazzi*schen Gleichungen (3b) durch die Momente ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}(M_{11}+M_{22})-(1+\nu)\left(\frac{\partial M_{22}}{\partial x_1}-\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}\right)&=0\\ \frac{\partial}{\partial x_2}(M_{11}+M_{22})+(1+\nu)\left(\frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}-\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}\right)&=0\end{aligned}\right\}\qquad(11\text{b})$$

Mit Benutzung der Gleichgewichtsbedigungen (1b) und der Abkürzung

$$M_{11}+M_{22}=M\qquad(12\text{b})$$

entsteht aus (11b)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial x_1}-(1+\nu)\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}&=0.\\ \frac{\partial M}{\partial x_2}+(1+\nu)\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}&=0\end{aligned}\right\}\qquad 13\text{b}),$$

wozu nach (12b) und (2b) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}&=M\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2}&=2\Omega\end{aligned}\right\}\qquad(14\text{b})$$

treten. Durch Integration errechnen sich die Spannungsfunktionen Φ_1 und Φ_2 zu

$$\left.\begin{aligned} \frac{12\,(1-\nu^2)}{E\,h^3}\,\Phi_1 &= -\,(1-\nu)\,\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + q_1 \\ \frac{12\,(1-\nu^2)}{E\,h^3}\,\Phi_2 &= -\,(1-\nu)\,\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + q_2 \end{aligned}\right\} \qquad (15\text{b})$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \int \frac{12\,(1-\nu)}{E\,h^3}\,M\,d\,x_1 - \frac{12\,(1-\nu^2)}{E\,h^3}\,\Omega\,d\,x_2 \\ q_2 &= \int \frac{12\,(1-\nu^2)}{E\,h^3}\,\Omega\,d\,x_1 + \frac{12\,(1-\nu)}{E\,h^3}\,M\,d\,x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{b})$$

wegen (13b) ein Paar harmonisch-konjugierter Funktionen sind. Dabei ist

$$\frac{12\,(1-\nu)}{E\,h^3}\,M = \Delta\,v_3 \qquad (17\text{b})$$

Hiermit ist die Verbindung zwischen den Spannungsfunktionen Φ_1 und Φ_2 der Platte und ihrer Durchbiegung v_3 hergestellt. Für die Darstellung von Φ_1 und Φ_2 ist es nicht wesentlich, daß v_3 die Durchbiegung der Platte ist. Wesentlich ist vielmehr, daß v_3 biharmonisch ist und durch (16b) und (17b) an q_1 und q_2 gebunden. Durch den Ansatz

$$v_3 = \frac{1}{4}\,(\varphi + x_1\,q_1 + x_2\,q_2) \qquad (18)$$

mit $\Delta\,\varphi = 0$ sind (16b) und (17b) abgegolten, so daß Φ_1 und Φ_2 im wesentlichen durch 2 harmonische Funktionen dargestellt sind [6].

Die beiden Gleichungssysteme (13a, 13b) unterscheiden sich nur im Vorzeichen der Querkontraktionsziffer ν. Aus der Theorie der Scheibe sind noch andere Integrationsverfahren bekannt [6]. Welches von diesen gegebenenfalls zu verwenden ist, richtet sich nach den vorliegenden Randbedingungen.

In dem sehr häufig auftretenden Fall, daß bei Scheibe und Platte die Randbelastung vorgeschrieben ist, empfiehlt sich die Verwendung der Spannungsfunktionen, deren Randbedingungen sich sehr einfach aus der Randbelastung berechnen lassen. Der Vektor (Φ_1, Φ_2, Φ_3) der Spannungsfunktionen ist nämlich der Momentenvektor der Randbelastung eines Randstücks endlicher Länge, bezogen auf den Endpunkt des Randstücks [5].

Über den ästhetischen Wert einer Analogie sollte man nicht diskutieren. Der praktische Wert der meisten Analogien, insbesondere in der Elastizitätstheorie (es sei an das *Prandtl*sche Membrangleichnis und die hydrodynamische Analogie beim Torsionsproblem erinnert) liegt weniger in ihrer experimentellen Realisierbarkeit, als vielmehr in einer nachdrücklichen Förderung der Anschaulichkeit ungewohnter Begriffe und der Überblickbarkeit längerer Kausalketten. Die Statik ist seit jeher um Analogien zur Kinematik und Geometrie bemüht. Die soeben vorgetragene Analogie Scheibe-Platte paßt in dieses Programm. Vorgegebene Randbelastungen werden mit Hilfe der Spannungsfunktionen in

vorgegebene Randverschiebungen umgedeutet, ein Momentenfeld in ein Verzerrungsfeld und Spannungen in Verkrümmungen. Der beim Übergang von der Platte mit Randbelastung zur Scheibe mit Randverschiebung auftretende Vorzeichenwechsel der Querkontraktion wird bei qualitativen Betrachtungen nicht stören.

3. Das Variationsproblem für die Spannungsfunktionen der Platte

Die Formänderungsarbeit der Platte je Volumeinheit ist

$$a = \frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij} \varkappa_{ij} \tag{19}$$

oder, mit Hilfe von (6b) durch die Momente allein ausgedrückt,

$$a = \frac{6}{E h^3} \left[(M_{11} + M_{22})^2 - 2(1+\nu)(M_{11} M_{22} - M_{12}^2) \right] \tag{20}$$

Führt man nach (2b) die Spannungsfunktionen ein, so kommt

$$a = \frac{6}{E h^3} \left[M^2 + 2(1+\nu)\Omega^2 - 2(1+\nu)\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \right) \right] \tag{21}$$

wobei wir zur Abkürzung (14b)

$$M = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}$$

$$2\Omega = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}$$

benutzt haben.

Die Platte sei am Rande belastet mit vorgeschriebenen Kräften und Momenten. Damit sind die Randwerte von Φ_1 und Φ_2 gegeben.

Im Sinne des Prinzips von *Castigliano* sind die tatsächlich auftretenden Spannungsfunktionen diejenigen, die das über die ganze Platte erstreckte Integral

$$A = \frac{1}{2} \iint \left[M^2 + 2(1+\nu)\Omega^2 - 2(1+\nu)\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \right) \right] dx_1\, dx_2 \tag{22}$$

zum Minimum machen bei Beachtung der vorgeschriebenen Randbedingungen für Φ_1 und Φ_2. Die vollständige Variation von A lautet

$$\begin{aligned}
\delta A = &- \iint \left[\left(\frac{\partial M}{\partial x_1} - (1+\nu) \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \right) \delta \Phi_1 + \left(\frac{\partial M}{\partial x_2} + (1+\nu) \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \right) \delta \Phi_2 \right] d x_1\, d x_2 \\
&+ \oint \left[(1+\nu) \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} - \left(M \frac{\partial x_1}{\partial s} - (1+\nu)\, \Omega \frac{\partial x_2}{\partial s} \right) \right] \delta \Phi_2\, d s \\
&- \oint \left[(1+\nu) \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} - \left((1+\nu)\, \Omega \frac{\partial x_1}{\partial s} + M \frac{\partial x_2}{\partial s} \right) \right] \delta \Phi_1\, d s = 0
\end{aligned} \tag{23}$$

Die beiden letzten, über den Rand erstreckten Integrale verschwinden, weil $\delta \Phi_1 = \delta \Phi_2 = 0$ auf dem Rand. Aus der Willkürlichkeit der $\delta \Phi_1$ und $\delta \Phi_2$ im Inneren des Plattenbereiches folgt das Gleichungssystem (13b, 14b).

(In unserer Analogie entspricht diesem Variationsproblem bei der Scheibe dasjenige vom Minimum der potentiellen Energie bei vorgeschriebenen Randverschiebungen v_1 und v_2).

In spannungsfreien Bereichen, z. B. dort, wo die Platte Löcher hat, sind die Spannungsfunktionen Φ_1 und Φ_2 lineare Funktionen der Koordinaten x_1 und x_2:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= a_1 - b\,x_2 \\ \Phi_2 &= a_2 + b\,x_1 \end{aligned}\right\} \tag{24b}$$

(In verzerrungsfreien Bereichen, z. B. dort, wo die Scheibe starre, jedoch frei verschiebliche Gebiete enthält, sind

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \alpha_1 - \beta\,x_2 \\ v_2 &= \alpha_2 + \beta\,x_1 \end{aligned}\right\} \tag{24a}$$

die ebenen Verschiebungen eines starren Körpers.)

An jedem Lochrand sind deshalb die Variationen $\delta\,\Phi_1$ und $\delta\,\Phi_2$ durch die 3 voneinander unabhängigen Variationen δa_1, δa_2 und δb gegeben. Im Inneren des mehrfach zusammenhängenden Plattenbereiches verschwindet wegen (13b) das Flächenintegral in (23). Aus den Randintegralen in (23) erhält man für jeden Lochrand 3 Gleichungen, entsprechend der Willkürlichkeit von $\delta\,a_1$, $\delta\,a_2$ und $\delta\,b$.

Für den lastfreien Lochrand beispielsweise lauten sie, wenn man zur Abkürzung noch (16b) benutzt:

$$\left.\begin{aligned} &\oint \frac{\partial q_1}{\partial s}\,d s = 0\,; \qquad \oint \frac{\partial q_2}{\partial s}\,d s = 0 \\ &\frac{12\,(1-\nu^2)}{E\,h^3}\,2\,b\,F + \oint \left(x_1 \frac{\partial q_1}{\partial s} + x_2 \frac{\partial q_2}{\partial s}\right) d s = 0 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

(F = Flächeninhalt des Lochbereiches).

Ein Blick auf (15b) und (18) lehrt, daß die 3 Bedingungen (25) die Eindeutigkeit von $\frac{\partial v_3}{\partial x_1}$, $\frac{\partial v_3}{\partial x_2}$ und v_3 verlangen.

(Bei der Scheibe bedeuten die zu (25) analogen Bedingungen, wie man aus (15a) schließt, die Forderung nach der Eindeutigkeit der Airyschen Spannungsfunktion und ihrer beiden ersten Ableitungen, also des Verschwindens der Dyname aller Randkräfte des starren Scheibenbereiches).

Die 3 Bedingungen (25) erscheinen als natürliche Randbedingungen des Variationsproblems der Spannungsfunktionen.

Das Variationsproblem der Airyschen Spannungsfunktion bei der durchlochten Scheibe ist bereits von *Prager* [7] untersucht worden. (Das Analogon ist das Variationsproblem für die Durchbiegung einer Platte mit biegestarren Einschlüssen.)

Die 3 Bedingungen für jeden Lochrand treten auch dort als natürliche Randbedingungen auf, und *Prager* weist darauf hin, daß bei Benutzung direkter Methoden der Variationsrechnung dieser Sachverhalt von Bedeutung ist.

Literatur

[1] *K. Wieghardt*, Über ein neues Verfahren, verwickelte Spannungsverteilungen in elastischen Körpern auf experimentellem Wege zu finden. Mitteil. Forschungsarb. Ingenieurwes. 49, (1908).

[2] *H. Cranz*, Die experimentelle Bestimmung der Airyschen Spannungsfunktion mit Hilfe des Plattengleichnisses. Ing.-Arch. 10, (1939).

[3] *R. D. Mindlin*, The analogy between multiply-connected slices and slabs. Quart. Appl. Math. IV, (1946).

[4] *W. Günther*, Die Gleichungen der Plattenbiegung als kanonisches System in tensorieller Darstellung. Abh. Braunschwg. Wiss. Ges. V, (1953).

[5] *H. Schaefer*, Die drei Spannungsfunktionen des zweidimensionalen ebenen Kontinuums. Österr. Ing.-Arch. X, (1956).

[6] *K. Marguerre*, Ansätze zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie. ZAMM 35, (1955).

[7] *W. Prager*, On plane elastic strain in doubly-connected domains. Quart. Appl. Math. III, (1945).